Jegyzőkönyv

a

nehézségi gyorsulás méréséről (1)

Készítette: Tüzes Dániel

Mérés ideje: 2008-11-05, szerda 14-18 óra

Jegyzőkönyv elkészülte: 2008-11-12

A mérés célja

A feladat a nehézségi gyorsulás meghatározása nagy pontossággal. Habár mai világunkban olyan technológiák állnak rendelkezésünkre e cél megvalósításához, melyek száz évvel ezelőtt elképzelhetetlenek lettek volna, mérésünket – megbecsülendő eleink precizitása és ötletessége – egy megfordítható ingával fogjuk végezni, melynek nem csak az ötlete több mint 100 éves, de talán a laboratóriumban ehhez rendelkezésre álló eszköz maga is.

Elvi alapok

A matematikai inga T lengésideje - mint ahogy az ismeretes - $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, ahol l a fonál hossza, g pedig a nehézségi gyorsulás értéke. Ha lemérjük a fonálhosszt és a lengésidőt, akkor abból g értéke meghatározható. Matematika inga helyett kiterjedt ingákkal is lehet g-t mérni, ekkor azonban a periódusidőre vonatozó egyenlet $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_b}{Msg}}$ lesz, ahol J_b és M az ingára jellemző mennyiségek: a tehetetlenségi nyomatéka és tömege.

Mérésünk során egy megfordítható, ún. reverziós ingát használunk, melyen két felfüggesztési (valójában alátámasztási) pontja van. Az ingán továbbá van egy mozgatható súly is, mellyel az inga tömegközéppontjának a helyzetét változtathatjuk, és így közvetve a lengésidejét is. Nem szükségszerű (és igazolható, hogy nem is), hogy az inga lengésideje a két ék esetében vizsgálódva ugyan annyi legyen. A tolósúly mozgatásával megmérve a lengésidőt mindkét éken, ezeket ábrázolva - az elméleti megfontolásaink után – metszéspontokat várhatunk a görbéken. Elméleti megfontolásainkból az is következik, hogy 3 db metszéspontot kapunk, ebből1 triviális: mikor az inga tömegközéppontja a két ék között félúton van. Megfelelően készített inga esetében a tolósúly mozgatásával a másik két metszéspont környezetében vizsgálódhatunk.

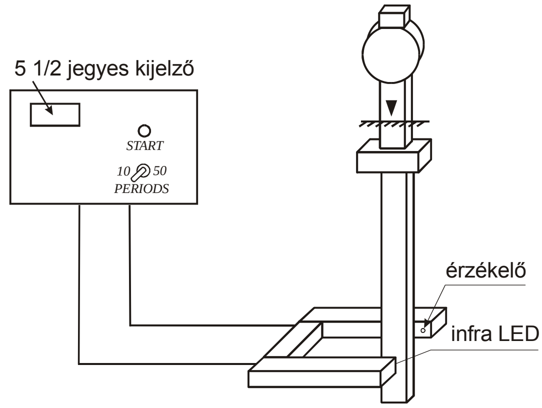
A nem triviális metszéspontokban történő pontos mérésekkel, a metszésponti lengésidőből nagy pontossággal meghatározható a nehézségi gyorsulás nagysága, melynek értéke $g = \frac{4\pi^2 l_e}{T^2}$.

A nagy pontosság eléréshez figyelembe kell venni egyes korrekciókat. Egyik ilyen, hogy a lengésidőre vonatkozó összefüggéseink csak kis kitérésekre igazak, vagyis számolásaink során egy $\sin\alpha \approx \alpha$ közelítést alkalmaztunk, ahol α a kitérés szöge. A mérési elrendezésből adódóan azonban a nagy pontosság elérésénél láthatjuk majd, hogy bizony figyelembe kell venni a szinusz sorfejtésénél már a nem lineáris tagokat. Továbbá ilyen nagy pontosságnál figyelembe veendő még, hogy az ingára hat felhajtóerő, mivel levegő veszi körül. Ezt úgy vesszük figyelembe, hogy a lengésidőből levonunk $\Delta T_{korr} = 0,8\frac{\rho_{lev}}{\rho_{inga}}T$ időt, és ezzel számoljuk ki g értékét. Egy lehetséges harmadik korrekciós tényező hidrodinamikai okokra vezethető vissza, miszerint a közegnek ellenállása és súrlódása is van: lengés közben az ingára tapadó levegőtömeg és leváló légörvények befolyásolják a lengésidőt.

A mérési módszer ismertetése

Tekintsük az ábrát (2.oldal) a mérési elrendezéshez! Az inga lengésidejét fénykapu segítségével mértem. A fénykapu egy elektronikához csatlakozik, mely méri az indítástól számított időt, és számlálja a lengéseket. A hibák csökkentéséhez lehetőség van 10 illetve 50 lengés lengésidejének mérésére. Az elektronika időmérője automatikusan indul, mikor első alkalommal áthalad előtte az inga.

Az ingát kis szögben kitérítve, majd elengedve az elektronika elkezdi mérni az időt. A kitérésnél figyelembe kell venni, hogy lehetőleg mindig ugyan akkora mértékben térítsük ki az ingát, és hogy ennek mértékét úgy válasszuk meg, hogy teljes terjedelmével haladjon el mindig a fénykapu előtt. A műszer károsodásának megelőzésén kívül a mérés pontosságához is szükséges, hogy az inga ne érjen hozzá a fénykapu keretéhez, sem pedig a felfüggesztési pont tartóbakjához.



Az ingán a két ék között szimmetrikusan elhelyezkedő centiméter skála található, a $[-10,10]$ tartományban milliméteres, egyébként fél centiméteres léptékkel. A tolósúlyt az inga egyik végpontjába helyeztem, és megmértem 10 lengésre a lengésidőt. Ezek után a súlyt 5 cm-rel odébb helyeztem, majd megismételtem a mérést, és ezt folytattam az inga teljes hosszára. Ezek után megfordítottam az ingát, és az előzővel megegyező módon ismét megmértem a lengésidőket. A súly helyzetének leolvasásához a mozgatható súlyon lévő jelölés által az ingán lévő cm skála kijelölt helyzetét kellett figyelni.

Az összetartozó értékpárok grafikus ábrázolásával meghatározhatóak voltak a várt metszéspontok helyzetei, vagyis ahol az inga lengésideje megegyezett a megfordított inga lengésidejével. Ezek közül az egyik értéknél $0{,}5cm$ -es léptékkel újramértem a lengésidőket az inga mindkét helyzetében. Ennek segítségével meghatározható az elméleti bevezetőben ismetett formula szerint a nehézségi gyorsulás értéke.

A méréshez tartozik még annak igazolása, hogy a metszéspontok közül egyik sem a triviális metszéspont, és reprodukciós vizsgálattal ellenőrizni annak jogosságát, hogy 50 lengésidő mérésénél sem kaptunk volna számottevően pontosabb mérést. Előbbit azzal igazolom, hogy meghatározom a dentibus-elv segítségével a tolósúly mozgatása során a tömegközéppont helyzeteit, és így megadom a tömegközéppont helyzete – tolósúly helyzete függvényt. Az eredmény igazolja vagy cáfolja azon feltevésünket, hogy nem a triviális metszéspont körül mérünk, aszerint, hogy a tolósúlyt tudtuk-e volna olyan helyzetbe vinni, hogy a tömegközéppont a merőeszköz skálájának 0 helyzetére kerüljön.

Mérési eredmények, hibaszámítás

- $5cm$-es lépésközű lengésidő-mérés

Ezen méréssorozat során a mért értékeket az alábbi táblázatban foglalom össze:

inga helyzete: kék jelzés felül		inga helyzete: fekete jelzés felül	
tolósúly-helyzet (cm)	10 lengésidő (s)	tolósúly-helyzet (cm)	10 lengésidő (s)
40	20,148	40	20,189
35	20,092	35	20,086
30	20,042	30	19,995
25	19,997	25	19,924
20	19,962	20	19,863
15	19,931	15	19,818
10	19,908	10	19,784
5	19,889	5	19,764
0	19,884	0	19,756
-5	19,881	-5	19,761
-10	19,891	-10	19,774
-15	19,902	-15	19,802

-20	19,926	-20	19,842
-25	19,955	-25	19,889
-30	19,991	-30	19,943
-35	20,037	-35	20,013
-40	20,089	-40	20,090
-45	20,150	-45	20,173

Az eredményeket grafikusan ábrázoltam, mely grafikont a jegyzőkönyvhöz csatoltam. A mérési pontosság a grafikus ábrázolásból empirikusan érezhető abból, hogy a pontok milyen jól illeszkednek egy harmadfokú görbére, így a becsült hiba első közelítésben ezredmásodperc nagyságrendű.

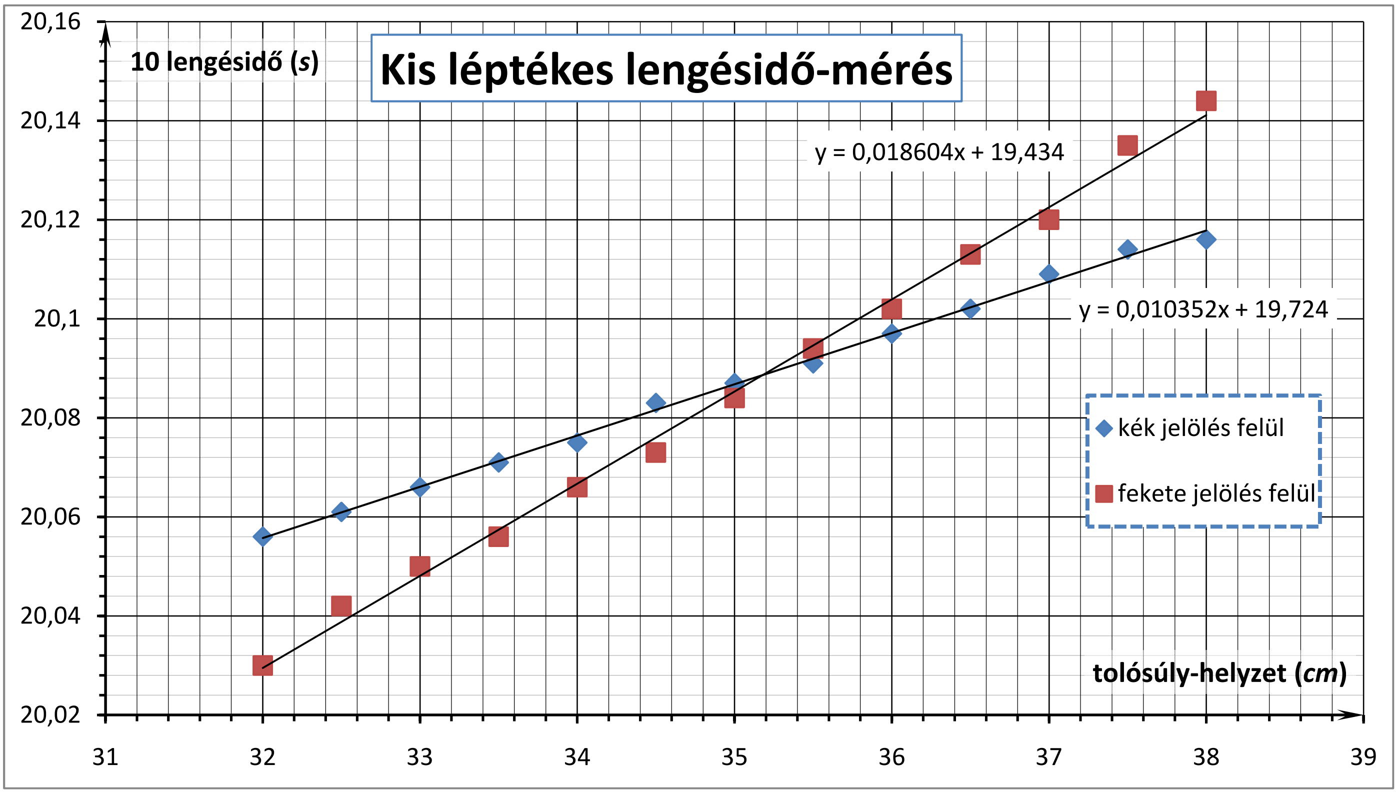
A mérési eredményekből látható, hogy -45 cm és 35 cm környékén vannak a metszéspontok. Ezek közül választva az egyiket, újra megmértem a lengésidőket, de most 0,5 cm lépésközzel. A vizsgált tartomány egy figyelmetlenség miatt $[27cm, 38cm]$, ennek releváns része a 35 cm körüli értékek.

- **0,5 cm-es lépésközű lengésidő mérés**

A mérés során kapott értékeket táblázatban foglalom össze, feltüntetve a némely helyeken végzett reprodukciós méréseket is.

inga helyzete: **kék** jelzés felül		inga helyzete: **fekete** jelzés felül	
tolósúly-helyzet (cm)	10 lengésidő (s)	tolósúly-helyzet (cm)	10 lengésidő (s)
27	20,009	27	19,956
27,5	20,013	27,5	19,967
28	20,017	28	19,973
28,5	20,024	28,5	19,977
29	20,028	29	19,983
29,5	20,030	29,5	19,984
30	20,035 20,037 20,037	30	19,997 19,998 19,996
30,5	20,042	30,5	20,005
31	20,045	31	20,010
31,5	20,050	31,5	20,023
32	20,054 20,056	32	20,030 20,030
32,5	20,063 20,061	32,5	20,039 20,042
33	20,070 20,066	33	20,047 20,050
33,5	20,071	33,5	20,056
34	20,075	34	20,066
34,5	20,083	34,5	20,073
35	20,087 20,087 20,087 20,087	35	20,084 20,084 20,085 20,082
35,5	20,091	35,5	20,094
36	20,097	36	20,102
36,5	20,102	36,5	20,113
37	20,109	37	20,120
37,5	20,114	37,5	20,135
38	20,116	38	20,144

A reprodukciós méréseken kívül az első méréssorozat eredményeit is figyelembe vehetjük a pontosság megállapításánál. Az eredményekből látható, hogy a mérés pontossága legtöbb esetben $\pm 0{,}002s$, vagyis $\delta T = 0{,}010\%$. Ez a hibák felülbecslése, ugyanis számos helyen az eltérés nem haladja meg a 3 ezredmásodpercet sem, melyből $\delta T \approx 0{,}005\%$. Az adatok $35\,cm$ körüli értékét a következő grafikon ábrázolja, melyekre lineáris regresszióval illesztett egyenesek egyenleteiből megkaphatjuk azon lengésidőt, melyekből nagy pontossággal meghatározhatjuk g értékét.



A metszéspont $10T = 20{,}087s$ -nál van, a hiba grafikus becslés alapján $\pm 0{,}005s$. Ez nagyobb, mint az egyes mérési eredmények szórása, vagyis ezzel messze felülbecsüljük a hibát.

A mérés során az **ablakfelőli helyen, a hosszú inával** mérten, így az egyes számításokban az inga hosszára $l = (1003{,}3 \pm 0{,}2)\,mm$ értéket helyettesítettem. A mérés alapján korrekciók nélkül a nehézségi gyorsulás értéke $g = 9{,}816\,m/s^2$, hibája pedig a metszéspontok hibájából $\Delta g = g(2\delta T + \delta l) = 0{,}009\,m/s^2$ rosszabb esetben, a hibák felülbecslésével. A hibát az egyes mérések pontatlanságából számítva $\Delta g = g(2\delta T + \delta l) = 0{,}005\,m/s^2$. Ebben az esetben a mérés legnagyobb hibáját az ékek távolságának hibája okozza. Vagyis kijelenthetjük, hogy ezzel a módszerrel történő lengésidő-mérés a körülményekhez mérten a lehető legpontosabb.

- **Korrekciók figyelembe vétele**

Első korrekció, amit figyelembe veszünk, az abból adódik, hogy a lengés nem pont harmonikus. Egzakt számolással megkaphatjuk a korrekció pontos mértékét a kitérés függvényében. Az inga $3\,cm$-re tért ki, és hossza hozzávetőleg $120\,cm$ volt, így a kitérés szöge 2,5°, melyből a korrekció mértéke $0{,}0119\%$. (A mellékelt irodalomban megtalálható az egyes kitérési szögekhez tartozó korrekciók.) Így a nehézségi gyorsulás értéke $g = 9{,}814\,m/s^2$, a hiba pedig gyakorlatilag az előzővel megegyező.

Második korrekcióként vegyük figyelembe az ingára ható felhajtóerőt. A korrekció mértéke ebben az esetben $\Delta T_{korr} = 0,8 \frac{\rho_{lev}}{\rho_{inga}} T$, mint ahogy az elméleti részben leírtam. Közelítve az egyes értékeket: $\rho_{lev} = 1,2 kg / m^3$, $\rho_{inga} = \rho_{réz} = 9000 kg / m^3$, így $\Delta T_{korr} = 0,0002 s$, melyből a nehézségi gyorsulás értékére kapjuk, hogy $g = 9,813 m / s^2$, és hibája pedig $\Delta g = 0,005 m / s^2$.

- **Föld forgásának kimutathatósága**

Kérdés, hogy ezzel a módszerrel kimutatható lenne-e, hogyha megállítanák a Földet, és ezzel együtt az általunk megélt világban a testekre nem hatna a centrifugális erő. Elméleti megfontolásokkal élve láthatjuk, hogy ennek korrekciós értéke $\Delta g = \Omega^2 R \cos^2 \varphi$, ahol R a Föld sugara: $R = 6400 km$, Ω a Föld szögsebessége: $\Omega = 2\pi / nap$, φ pedig a szélességi fok, $\varphi = \pi / 4$. Így kapjuk, hogy $\Delta g = 0,016 m / s^2$. Láthatjuk, hogy ez másfél-háromszorosa g mérési hibájának, vagyis kimutatható lenne egy ilyen mérési elrendezéssel a Föld forgásának megállása.

- **súlypont mérése**

A tolósúly mozgatásával feljegyeztem az inga tömegközéppontjainak helyzetét. A tapadási súrlódásra való tekintettel több helyen kellett volna mérni, mert a mérés pontossága így $\pm 0,5 cm$ volt. Vércukrom kritikus értékére való tekintettel az s súlypont helyzetét két tolósúly-helyzetben mértem meg: $s(-40cm) = 8cm$ és $s(40cm) = 15cm$. Így a két pontra „ $m \cdot x + b = s$ ” egyenest illesztve (közben meglepődve, hogy milyen jól illeszkedik a két pontra) $m = 0,0875 \pm 0,0125$ illetve $b = 11,5 \pm 0,5$. Ezzel igazolható a nagy pontatlanság ellenére, hogy nem a triviális metszéspont körül mértünk, ugyanis ehhez a tömegközéppont az $s = 0$ értéket a tolósúly $(-131 \pm 9) cm$ értékénél venné fel.

Az inga stabilitása megszűnik, ha a súlypont az ék alól az ék fölé helyeződik. A két ék távolságából tudjuk, hogy ez akkor következne be, ha a súlypont $s = \pm 50,17 cm$ helyet eléri. Ehhez az kell, hogy a tolósúlyt a $(-700 \pm 50) cm$ vagy $(440 \pm 30) cm$ helyzethez tudjuk mozgatni.

Melléklet

A jegyzetben több helyen hivatkoztam elméleti megfontolásokra, melyek a középiskolai tananyagból levezethetőek. Azonban néhány elméleti levezetést megtalálunk a következő műben is:
Havancsák Károly: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, ELTE
Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.