

## Modern Fizika Labor

### Fizika BSC

A mérés dátuma: 2009.05.04.	A mérés száma és címe: 18, granuláris anyagok	Értékelés:
A beadás dátuma:	A mérést végezte: Meszéna Balázs, Tüzes Dániel	

## Mérés célja

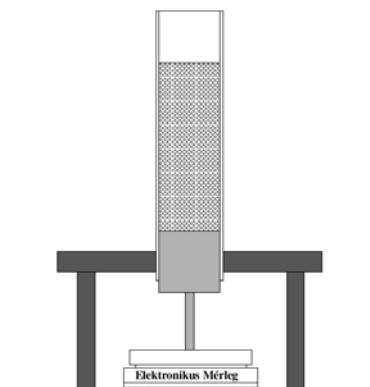
A fizikai törvények felállítását érthető okokból a legegyszerűbb rendszerekre tették meg először, bízva abban, hogy a világ leírását apróbb lépésenként könnyebb megtenni. Így a mozgásegyenletek és erőtvényeket didaktikai okokból és történetileg is először a pontszerű tömegpontokra írják – írták fel. A több pontból álló rendszerek, kiterjedt testek tárgyalása bonyolultabb, akárcsak a hidrodinamika, mely ma is számos kutatási lehetőséget biztosít. Habár a granuláris anyagok leírását megtehették volna a több pontból álló rendszereknél már a XIX. század előtt is, bonyolultsága, látszólag nehézkes alkalmazása és csekély haszna miatt csak a XX. század végén vált intenzív kutatási témává.

Mérésünk célja a granuláris anyagoknál jelentkező jelenségek fenomenologikus megközelítése és kvantitatív vizsgálata. Két jelenséget vizsgálunk méréseink során.

1. A részecskék átmérőjénél néhány nagyságrenddel nagyobb tárolóhengerben a granuláris anyagot halmozva a henger alján a nyomás a felette nehezedő anyagnak nem lineáris függvénye, mint ahogy azt egyszerű gondolatmenet alapján várnánk. A nyomás az anyagoszlop magasságának a növelésével telítésbe megy át, melyet exponenciális függvénnyel írhatunk le. A jelenséget Janssen modellje ugyan jól kezeli, a modellben tett feltételezéseket semmilyen mélyebb fizikai megfontolással nem indokolta.
2. A henger alján található részecskék hengerre ható erőeloszlása szintén magyarázatra szorul, ugyanis az a maximumtól nem a várt szerint Gaussosan, hanem  $e^{-x}$  szerint cseng csak le. A mikroszkopikus erőeloszlást a q-modell tárgyalja.

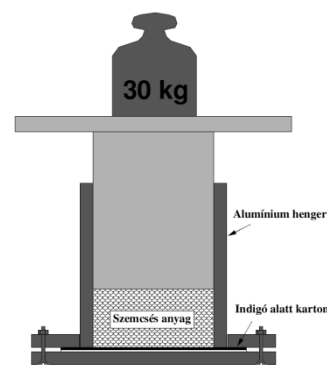
## Mérési leírás

Első mérési feladatunkhoz két mintával vizsgálódunk, mindegyikkel 3 független mérést végzünk. A mérési elrendezéshez tekintsük az ábrát! A henger alján egy dugattyú található, mely az alatta található elektronikus mérleget nyomja. A mérleget nyomó erőnek megfelelő tömegértéket grammokban olvashatjuk le, a készülék hibája  $\pm 1g$ . A dugattyú és a henger fala közti súrlódást elhanyagoljuk, de a mérés kezdete előtt igyekszünk azt olyan helyzetbe hozni, hogy ezt a lépést valóban megtehessek. A kezdetben üres hengerbe végig **azonos eljárással** adagoljuk az anyagot, 1-1 lépésben a laborban használható kanál tartalmának 3x-osát. A kanállal úgy igyekeztünk állandó mennyiséget merni, hogy púpozott kanál többletét egy egyenes lappal lesodortunk. Egy külön mérésben (kalibrálásban) megmértük, hogy mennyi tömeget jelent 3 lesimított kanál.



A vizsgált anyagot a henger tetejéig adagolva – ügyelve mérés közben arra, hogy sem a hengert, sem az asztalt ne mozgassuk, rázzuk meg –, lépésenként rögzítettük a mérleg által mutatott értéket. Ez az érték mint említettük, nem egyezik meg a hengerben található minta tömegével. A kalibrálásnak köszönhetően viszont tudtuk, mennyi tömegű anyag lehet a hengerben. Az adagolás befejeztével a granuláris anyag magasságát leolvastuk, figyelembe véve, hogy a henger alján 2,2cm sáv nem plexiből készült, így azt az adagolás megkezdése előtt megtettük. Ismerve a henger átmérőjét, a hengerben lévő minta tömegét, a minta ekvivalens-sűrűségértéke már meghatározható. A mérleg kijelzőjéről leolvasható ún. virtuális tömeget ábrázolva a valódi tömeg függvényében, a kapott grafikonra a kívánt görbét már illeszteni lehet.

Második mérési feladat kivitelezéséhez tekintsük az ábrát! Egy fémlapra a granuláris anyag méretével összevethető deformálhatóságú anyagot (két kartonlap) téve, arra papírlapot, papírlapra indigót helyezve kész az „erő detektorunk”. Ezzel az elrendezéssel képesek vagyunk meghatározni a henger alját nyomó golyók erő-eloszlását. A hengerben egyenletesen felhalmozva a mintát, egy dugattyút helyezünk rá. A dugattyú tetejére nagy súlyt helyezve a henger alján fellépő erők megsokszorozódnak, elérve a detektor mérési tartományát. Ezek után a papírlapot másikra kicserélve, a mérés ismételhető, mi ezt 4x tettük meg.

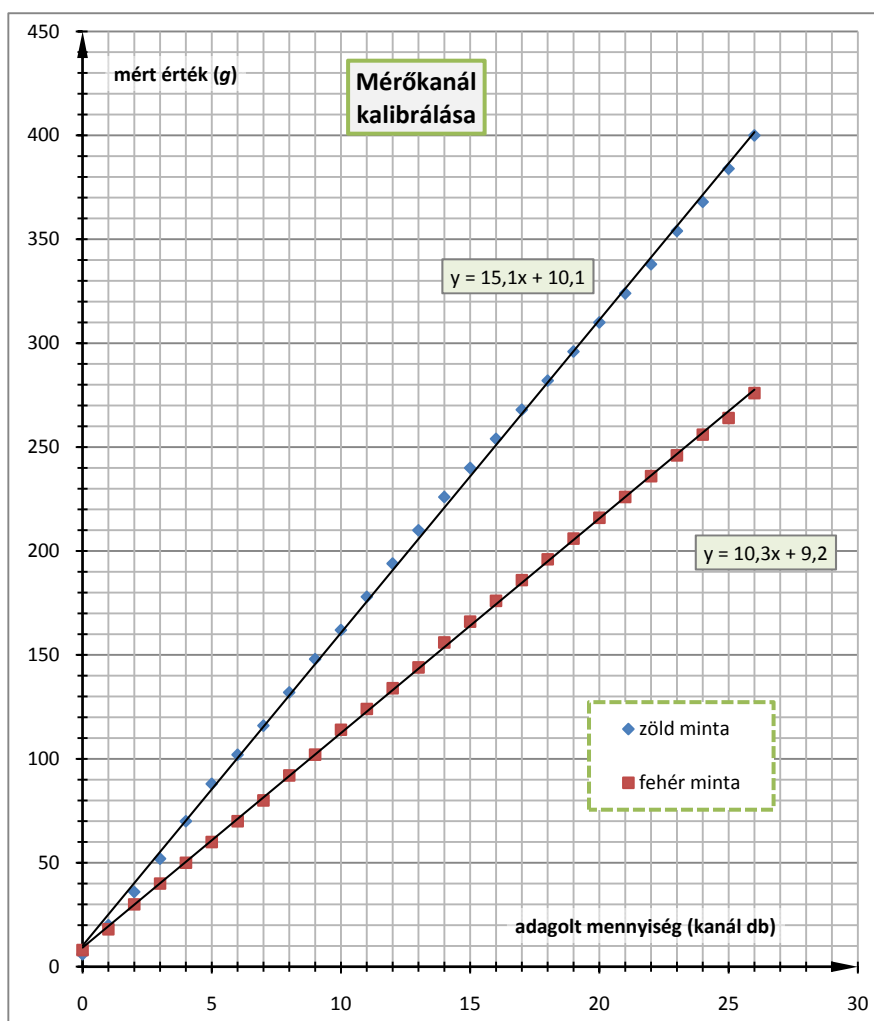


A papírlapon található pontokat utólagos digitális eljárással dolgozzuk fel. A feladat: megszámolni, hogy adott átmérőjű foltokból hány darab van, majd a hisztogramra görbét illeszteni. Feladat még a papírlapon található fluktuációk mérése, vagyis az ábra homogenitásának vizsgálata. Ehhez a kapott ábrát megfelezzük, és a felekből készítünk hisztogramokat, és ezeket vetjük össze az egészből készülttel. A felezést kétféleképp valósítjuk meg: egy átmérője mentén, és egy koncentrikus kör mentén. Valójában nem 1-1 mérési eredménnyel végezzük a lépéseket, hanem a független mérések eredményeinek összesítésével. Ezzel simább hisztogram és kisebb hibájú eredmény kapható.

## 1. mérési eredmények, a Janssen együttható

Először a kalibrációs eredményeket ismertetem. A mérlegre három műanyag poharat téve, felváltva töltve azokat egyesével, az alábbi eredményeket kaptuk:

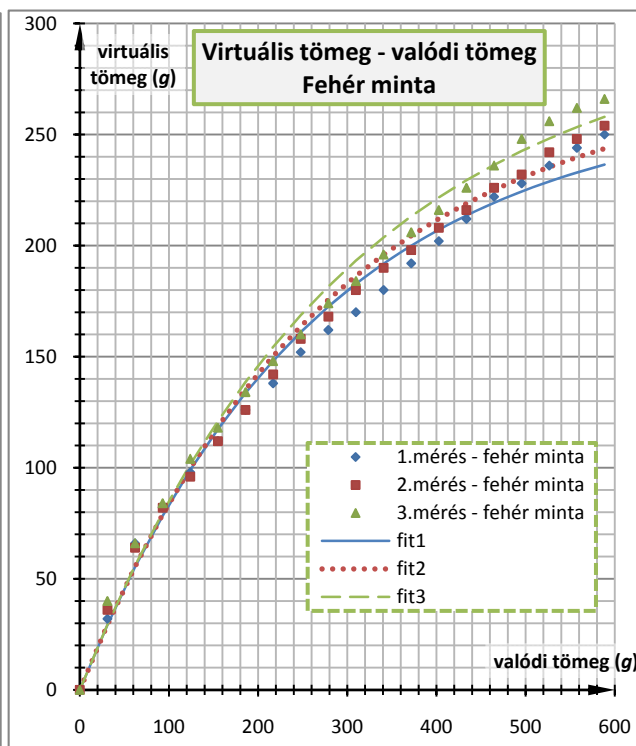
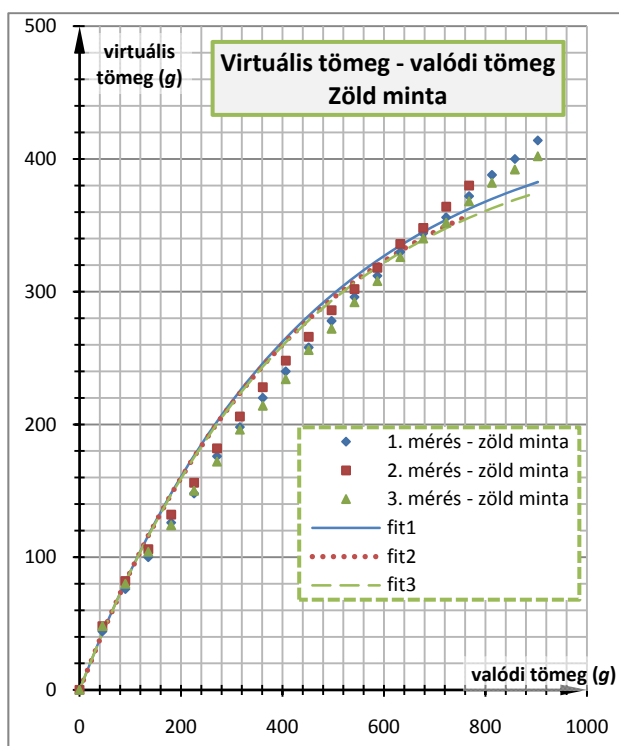
adagolt menny. (kanál)	zöld minta (g)	$\Delta m$ (g)	fehér minta (g)	$\Delta m$ (g)
0	6		8	
1	20	14	18	10
2	36	16	30	12
3	52	16	40	10
4	70	18	50	10
5	88	18	60	10
6	102	14	70	10
7	116	14	80	10
8	132	16	92	12
9	148	16	102	10
10	162	14	114	12
11	178	16	124	10
12	194	16	134	10
13	210	16	144	10
14	226	16	156	12
15	240	14	166	10
16	254	14	176	10
17	268	14	186	10
18	282	14	196	10
19	296	14	206	10
20	310	14	216	10
21	324	14	226	10
22	338	14	236	10
23	354	16	246	10
24	368	14	256	10
25	384	16	264	8
26	400	16	276	12
átlag (g)		15,1		10,3
szórás (g)		1,3		0,9



A mérési eredményben észrevehetünk egy szisztematikus hibát. Mindkét görbe „közepe” púposodik a regressziós egyenes fölé. Azt, hogy elején másképp viselkednek a mérési eredmények, még betudható a mérleg hibájának, ugyanis nem pont a közepére helyeztük a súlyt eleinte, a végén viszont valószínűleg az emberi tényező játszott közre: ha kevesebb minta van a tartóban, előfordulhat, hogy kevesebbet is mérünk a kanálba.

A virtuális tömeg – valódi tömeg mérés eredményei alatt, a 46g-os dugattyút figyelembe véve:

adagolt mennyiség (3 pohár)	zöld minta				fehér minta			
	tömeg (g)	virtuális tömeg (g)	virtuális tömeg (g)	virtuális tömeg (g)	tömeg (g)	virtuális tömeg (g)	virtuális tömeg (g)	virtuális tömeg (g)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	45,165	44	48	48	30,972	32	36	40
2	90,33	76	82	80	61,944	66	64	66
3	135,495	100	106	104	92,916	82	82	84
4	180,66	126	132	124	123,888	98	96	104
5	225,825	148	156	150	154,86	112	112	118
6	270,99	176	182	172	185,832	126	126	134
7	316,155	198	206	196	216,804	138	142	148
8	361,32	220	228	214	247,776	152	158	160
9	406,485	240	248	234	278,748	162	168	174
10	451,65	258	266	256	309,72	170	180	184
11	496,815	278	286	272	340,692	180	190	196
12	541,98	296	302	292	371,664	192	198	206
13	587,145	312	318	308	402,636	202	208	216
14	632,31	330	336	326	433,608	212	216	226
15	677,475	344	348	340	464,58	222	226	236
16	722,64	356	364	352	495,552	228	232	248
17	767,805	372	380	368	526,524	236	242	256
18	812,97	388		382	557,496	244	248	262
19	858,135	400		392	588,468	250	254	266
20	903,3	414		402		0	0	0
rázva (g)		2500				2000	1500	
hossz (cm)		55,5	46,2	54,3		55	56,4	54,1
$\rho$ (g / cm <sup>3</sup> )		0,938	0,958	0,959		0,617	0,601	0,627



A feltöltés végén a mintát megrázva virtuális tömeg növekedést tapasztaltunk, amit az erőláncok átrendezése okoz. Az ábráról látható továbbá, hogy az illesztett görbe a fehér minta esetén jobban követi a prediktáltat. Habár a Janssen modell feltevéseiből nem következne, hogy másképp lenne a két különböző formájú mintára a pontosság, sejthető, hogy a zöld minta egyenetlenebb formája okozza az eltérést. (A zöld minta nem gömbszerű, továbbá mérete sem volt annyira homogén, mint a fehéré.) A zöld minta 2. mérésénél kevesebbet mértünk, mert a 18-ik adagolást elrontottuk.

- Sűrűség számolása

A modellben használt sűrűségfogalmat kell meghatározni. A  $\rho = \frac{m_{\text{valódi}}}{V} = \frac{m_{\text{valódi}}}{(d/2)^2 \pi \cdot h}$  képletel

meghatározhatjuk az egyes mérésekben a sűrűségek értékeit. A henger átmérője  $d = (4,7 \pm 0,05) \text{ cm}$ , a magasságok értékei a feni táblázatban találhatóak, és az így már kiszámolható sűrűségértékek is. A sűrűségek átlaga:  $\rho_{\text{zöld}} = (0,952 \pm 0,02) \text{ g/cm}^3$  illetve  $\rho_{\text{fehér}} = (0,615 \pm 0,02) \text{ g/cm}^3$ .

A sűrűség hibáját a hossz mérés (mind a minta magassága, mind a henger átmérője) és a tömeg mérés hibája okozza. A magasság mérés hibáját az okozza, hogy nem homogén a minta tetejének a felszíne, hanem szemcsés, és nem vízszintes egyrészről, másrészről a leolvasási pontosság, mely jelentkezik a henger aljának mérésénél is. Ez utóbbi hibát  $0,05 \text{ cm}$ -nek vettük, és hozzáadtuk a minta magasságának a pontatlanságához. A minta a henger üvegfalán  $(2,2 \pm 0,05) \text{ cm}$ -rel lógott túl méréseink szerint.

Szemmértékkel élve állapítottuk meg a minta tetejének hozzávetőleges értékét centiméterszalag segítségével, melynek hibájára  $\pm 0,2 \text{ cm}$ -t becslünk. Így a sűrűség hibája 1-1 mérésre

$\delta\rho = \frac{0,25}{50} + \frac{0,05}{5} + \frac{1,3}{900} = 1,6\%$  a zöld minta esetében és  $\delta\rho = \frac{0,25}{55} + 2 \frac{0,05}{5} + \frac{0,9}{600} = 2,6\%$  a fehér minta esetében.

- Görbe illesztés

A mérési eredményekre a mérési leírásban található módszerrel a kívánt alakú

$m_{\text{virtuális}}(m_{\text{valódi}}) = m_{\infty} \left( 1 - e^{-\frac{m_{\text{valódi}}}{m_{\infty}}} \right)$  görbét illesztettük a gnuplot program segítségével. A program a

keresett paraméterek értékeire az alábbiakat adta:

	1. mérésből	2. mérésből	3. mérésből	átlag
zöld minta (g)	$m_{\infty} = 439 \pm 12$	$m_{\infty} = 429 \pm 11$	$m_{\infty} = 426 \pm 12$	$m_{\infty} = 431,2 \pm 7$
fehér minta (g)	$m_{\infty} = 265 \pm 5$	$m_{\infty} = 277 \pm 4$	$m_{\infty} = 300 \pm 5$	$m_{\infty} = 280,7 \pm 3$

A hibát az egyes eredmények hibáinak átlagának  $\sqrt{n}$ -ed részeként adtam meg,  $n = 3$ .

- Tapadási súrlódás meghatározása

A Janssen együttható meghatározásához már csak a tapadási súrlódást kell ismernünk. Ezt úgy határoztuk meg, hogy egy üveglapra egy olyan dobozt helyeztünk, melynek oldala az adott anyaggal volt bevonva. Így különböző dőlésszögű üveglapokra helyezve megvizsgáltuk, hogy mely meredekségénél csúszik meg a doboz. A mérés során az alábbiakat tapasztaltuk:

	1.mérés	2. mérés	3. mérés	átlag	szórás
zöld minta (°)	21	23	24	22,7	1,5
fehér minta (°)	15	22	17	18,0	3,5

Feltételezve, hogy Gauss eloszlásúak a mért eredmények, a szórásból megkapható a hiba. Sajnálatos módon a mérés legpontatlanabb része a tapadási súrlódás meghatározása volt. A mérési eredményből  $\mu_{\text{zöld,üveg}} = 1 \pm 0,1$ ,  $\mu_{\text{fehér,üveg}} = 0,7 \pm 0,2$ . A hibák itt olyan nagyok, hogy a hibaterjedés képletei nem érvényesek, így a feltüntetett hiba nem veendő komolyan.

- Janssen együttható értéke

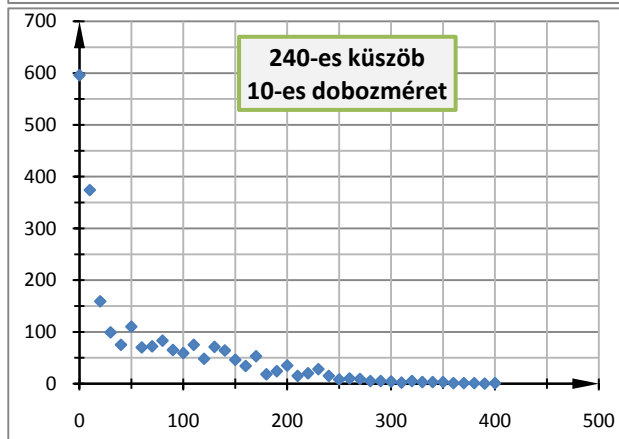
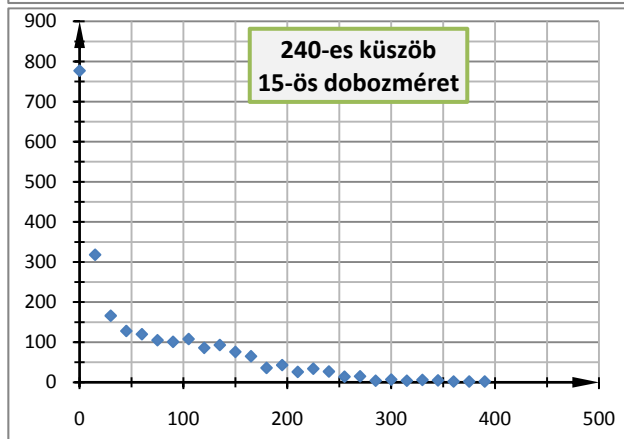
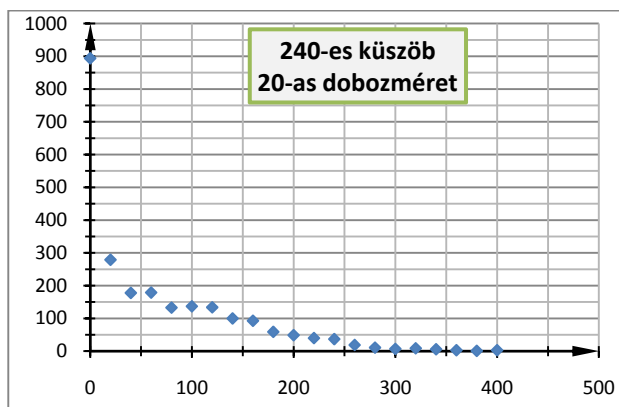
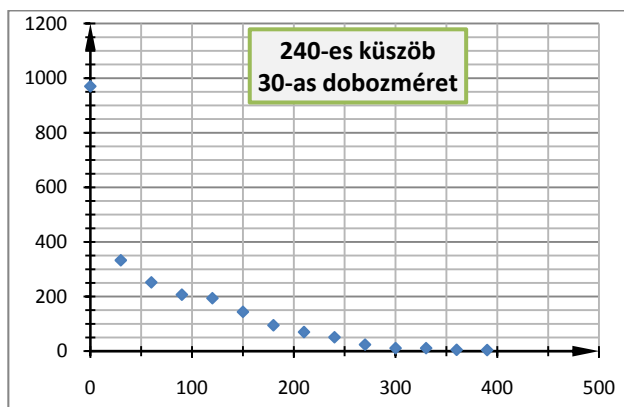
A Janssen együtthatót a  $K = \frac{R}{2\mu} \cdot \frac{R^2 \pi \rho}{m_\infty}$  egyenlet definiálja. Mostanra már minden mennyiséget

ismerünk benne, így értéke  $K_{\text{zöld minta}} = 0,045 \pm 0,005$  illetve  $K_{\text{fehér minta}} = 0,064 \pm 0,016$ . Mint láthatjuk, a hiba jelentős részét valóban a súrlódási együttható pontatlansága jelenti.

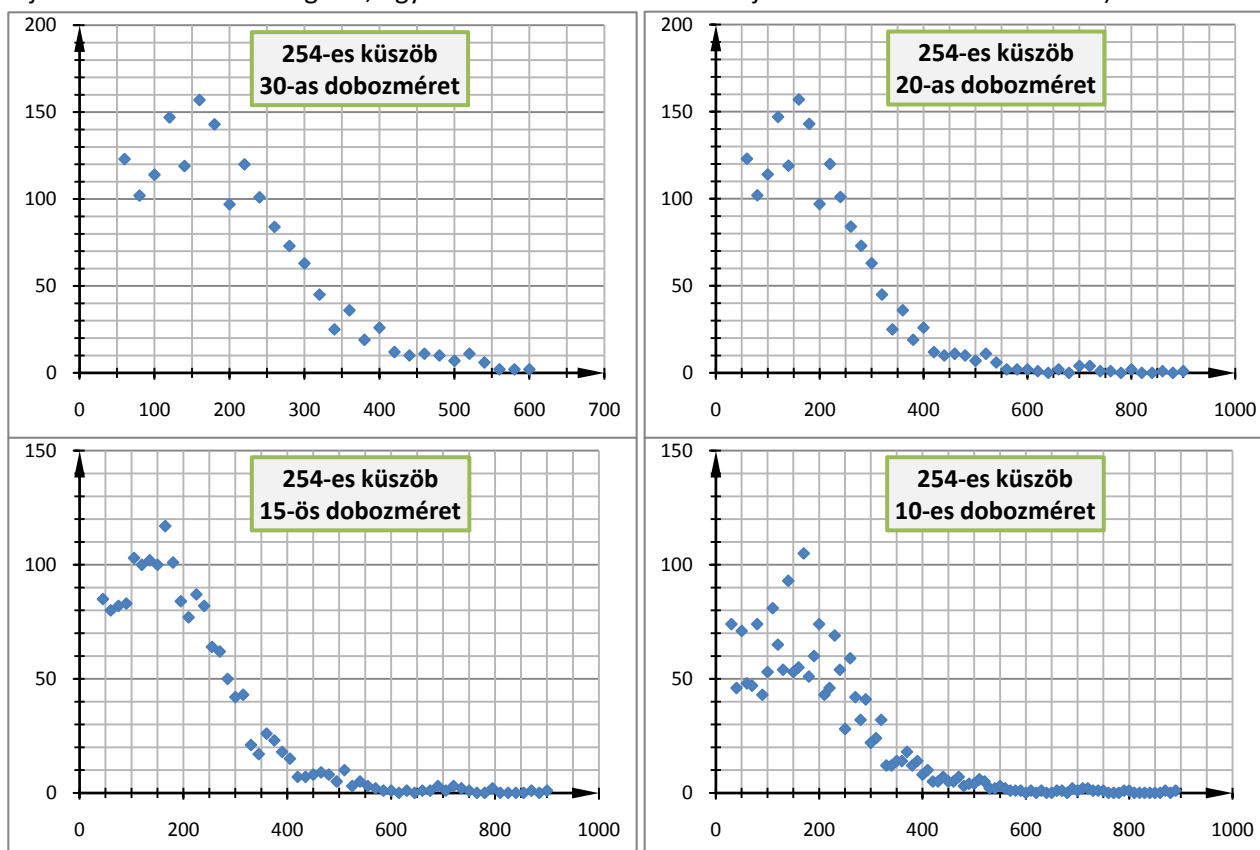
## 2. mérési eredmények, az erőláncok vizsgálata

A mérés során kapott lapot digitalizálva, szoftver segítségével megállapítható a foltméretek eloszlása. A jegyzet nem tárgyalja, hogy nem lehet a BMP-től eltérő file-formátumot választani, pl PNG-t vagy TIF-et, továbbá ha a módosított fileok nem a GIMP-pel lettek elmentve, a program hibával leállt. Továbbá sem a labor honlapján, sem a jegyzetben mutatott oldalon nem található `foltmeret`, sem pedig `eloszlas` program (nem is lehetne, hisz ezek a nevükből fakadóan nem is lennének futtathatók). A GIMP-ben két küszöbérték beállítására van lehetőség, számomra nem volt világos, melyiket kellett használni. A hisztogram közepén levő csúszkát mozgattam 240-ig, ez tűnt egy jó választásnak. A képen a képkivágáson kívül semmilyen más módosítás nem történt. Nem volt egyértelmű, hogy a `dispot` nevű program a „kuszobertek?” kérdéssel mit is vár, mindenesetre 240 érték lett beállítva, feltételezve, hogy ez ugyanaz az érték, mint amit a GIMP kijelzett.

4 dobozméret mellett az alábbi eredményeket kaptuk:

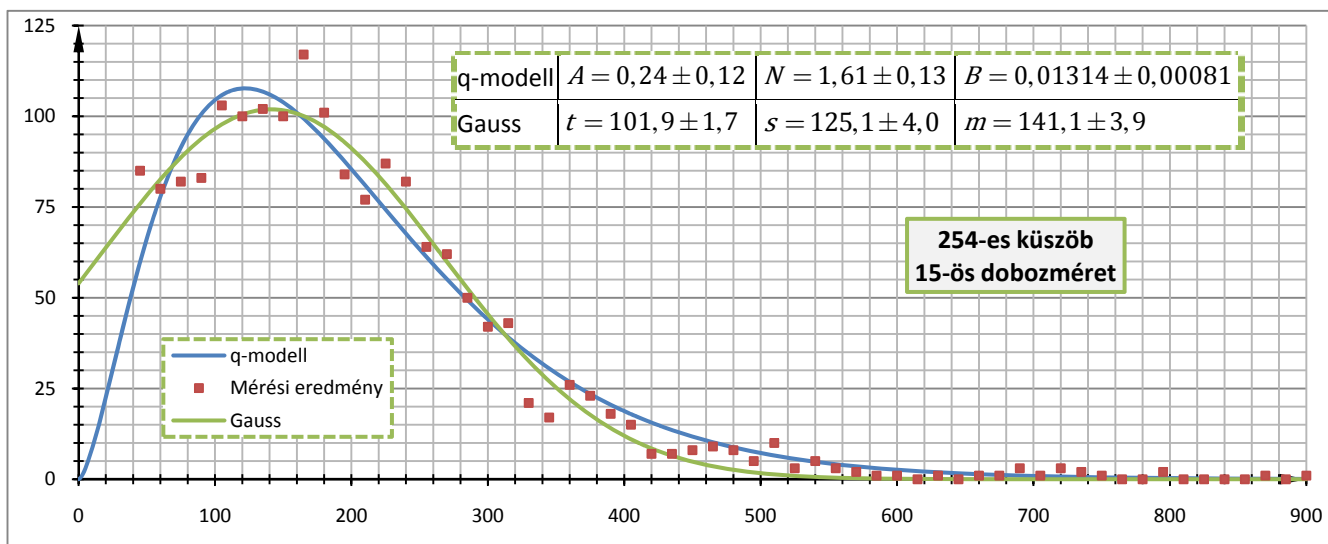


Az ordináta a gyakoriság, az abszcissa pedig az erő valamilyen egységekben. Látható, hogy nem sikerült az adatok kiértékelése vagy a modell hibás, ugyanis ezekre nem illeszthetők a kért függvények. A képek alaposabb elemzésével arra jutottunk, hogy a zaj foltméretei hiába kicsik, majdnem éppoly sötétek, mint a valódi mért pontok. A küszöbszintet feljebb tornáztatva sok zajt ki lehet szűrni, de a helyes foltok méretei jelentősen csökkennek ezáltal, ugyanis azok széle színén világosabb, amit a magasabb küszöbértékkel kidobunk. Tekintve, hogy az erő mértékegységét úgysem ismerjük, reménykedünk, hogy ez csak egy konstans faktorban számít, és a küszöbszintet a még éppen használható 254-es értékre állítottuk. Ebben az esetben az alábbi eredményeket kaptuk a különböző dobozméretekre (az első 3 doboz értékét a zajra való tekintettel levágtam, ugyanis ezen dobozok értéke a jellemző értékek többszöröse):

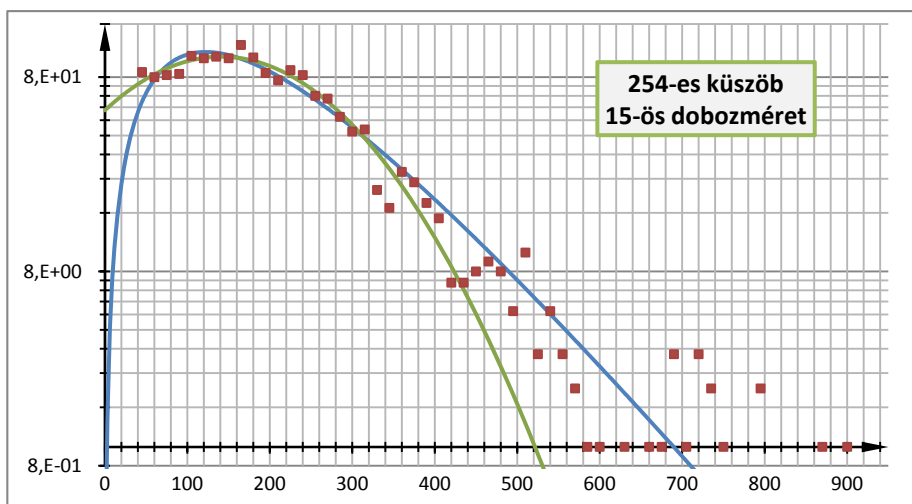


A kapott eredmények alapján a 15-ös dobozméretűnél elég folytonosnak tűntek a mérési eredmények, így azzal folytattuk a vizsgálódás. A mérési eredményre a gnuplottal  $P(v) = A \cdot v^N \cdot e^{-B \cdot v}$  és

$G(x) = t \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$  lakú függvényt illesztettünk. A paraméterek kezdeti értékeké hosszas próbálgatása után az alábbi eredményeket kaptuk, melyet grafikusán is ábrázoltam:



Illetve ugyanez az ábra szemi-logaritmikus skálán (a 0 értékű helyek feltüntetése csupán stilisztikai célt szolgáltnak). A Gauss görbe parabolikus levágása miatt az adatokat csak 800-ig szerepelttettem a jobb áttekinthetőségért. A mérési eredményekből érzésre úgy tűnik, hogy a q-modellből következő függvényalak jobban leírja a tapasztaltakat.



- Homogenitás vizsgálata

A mérés során kapott ábrákat egyenként megfeleztük, két egyenlő részre bontva őket, egy jobb és egy bal oldalra, majd vettük az összes jobboldaliból és az összes baloldaliból képzett hisztogramot. Ugyanezt megismételtük egy másik felezési módszerrel, ahol szintén két egyenlő területű részre bontottuk azokat, de itt egy belső körlapra és körgyűrűre, mely pont komplementere a kis körlapnak a nagy körlapra. Fizikai szemléletünk azt sugallja, hogy hacsak nincs szisztematikus hiba a mérésünkben, lényegi különbség csak utóbbi esetében fordulhat elő. A vizsgálat során kapott eredményeket csak grafikusán ábrázoltuk.

Az egyszerű felezéssel kapott hisztogramban a két fél eredménye nagyon hasonlít egymáshoz. Ugyan a jobb oldali pontoknál nagyobb mennyiségű kis erők vannak, a különbség nem győz meg minket, hogy a szimmetriát megsértve bármelyik oldalt megkülönböztessük a másiktól.

A körlap – körgyűrűs felezésnél szintén nem látható szignifikáns különbség. Megemlítenéd, hogy az első három doboz levágása jelen esetben is megtörtént, mely adatokban azt tapasztaltuk, hogy a zaj nagyobbik része származik a külső gyűrűtől, legalábbis a zajnak vélt túlzottan kis értékek számottevően többen voltak a külső gyűrűnél. Ha alaposabban megvizsgáljuk az ábrát, esetleg feltűnhet, hogy a külső gyűrűnél a kisebb erőkben több van, extrém nagy erők nem fordulnak elő – nem egy a belső gyűrűnél. A különbség azonban itt sem elegendő bármilyen éles állítás megfogalmazására.

